18-12-19

Απόδειξη (4) $\Rightarrow$ (1)

Δίνεται $I \neq \emptyset$, $X_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη

$$f: I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

Θέτουμε $X = \bigcup X_i$ (ορίζεται απ' το αξίωμα της ένωσης)

Το X έχει συνάρτηση επιλογής (από υπόθεση)

$\Rightarrow \exists\, F: \underbrace{P(X) \setminus \{X\}}_{} \longrightarrow X$

$(F(A) \in A_i \quad \forall A \subseteq X \neq \emptyset)$

$\Rightarrow$ ορίζεται το $F(X_i) \in X_i$ (εφόσον $X_i \neq \emptyset, X_i \subseteq X$ $\forall i \in I$)

Άρα ορίζουμε $f: I \longrightarrow \bigcup_{j \in I} X_j = X$

τ.ω $f(i) \in X_i$ $\forall i \in I$

$\longleftrightarrow$

Άσκηση: Αν $X \cong n \Rightarrow P(x) \cong 2^n$

Λύση: Θα το αποδείξουμε με επαγωγή.

$n = 0$ $\quad \underbrace{X \cong 0}_{} = \emptyset$

$\Downarrow$

$X = \emptyset$ Άρα $P(X) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(X) \cong 1 = 2^0$

$\Rightarrow$ 0 ισχύει

Ορίζω: $S = \{n \in \mathbb{N} \ \forall X \ (X \cong n \Rightarrow P(X) \cong 2^n)\}$

Θδο $0 \in S$ ✓

$n \in S \Rightarrow n^+ \in S$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ S επαγωγικό

Υπόθεση: $\boxed{n \in S}$ Θδο $n^+ = n+1 = n \cup \{n\} \in S$

Θέλω νδο αν $\boxed{\boxed{X \cong n^+} \Rightarrow P(X) = 2^{n+1}}$

$\Downarrow$

$\exists f \ X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{0,1,2,\dots,n\} = n \cup \{n\}$

f^{-1}

όπου $f^{-1}: \{0,1,2,\dots,n\} \longrightarrow X$

$\Rightarrow \exists! \ X_0$ τω $f(X_0) = n \Rightarrow \boxed{X_0 = f^{-1}(n)}$

Αφαιρώ το X_0 και έχω:

$f|_Y: \underbrace{X \setminus \{X_0\}}_{Y} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{0,1,\dots,n-1\}$

$\Rightarrow \boxed{Y \cong n}$

$\Delta_1 \subseteq P(x)$

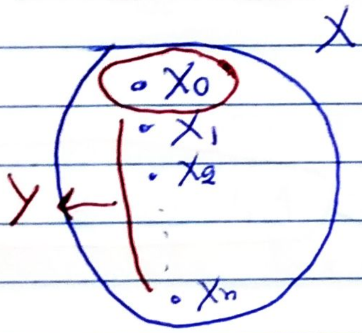
$P(x) = \{A : A \subseteq X\} = \boxed{\{A \subseteq X : x_0 \in A\}} \cup$

$\boxed{\{A \subseteq X : x_0 \notin A\}}$

$\Delta_2 \subseteq P(x)$

$\Delta_2 = P(Y) \cong 2^n \Rightarrow \boxed{\Delta_2 \cong 2^n}$

$\Delta_1 = \{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cong \Delta_3 = P(X \setminus \{x_0\})$



$A \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi(A) \subseteq X \setminus \{x_0\}$

$\varphi : \Delta_1 \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \Delta_3 \qquad \varphi(A) = A \setminus \{x_0\} \subseteq Y$

$\boxed{\underline{\varphi \ \ 1-1 \ \ \text{διότι}}}$ Αν $A, B \subseteq \Delta_1 \Rightarrow x_0 \in A, B \subseteq X$

και $\boxed{\varphi(A) = \varphi(B)}$ τότε:

$A \setminus \{x_0\} = B \setminus \{x_0\} \Rightarrow$

$\underbrace{(A \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\}}_{A} = \underbrace{B \setminus \{x_0\} \cup \{x_0\}}_{B}$

$\Rightarrow \boxed{A = B}$

φ επί:

Έστω $\mathcal{D} \subseteq X \setminus \{x_0\}$ θδο $\exists\, A \subseteq X$ $x_0 \in A$: $\varphi(A) = \mathcal{D}$

Για $A = \mathcal{D} \cup \{x_0\} \Rightarrow A \setminus \{x_0\} = \mathcal{D}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi: \text{ επί}}$

Άρα $\Delta_1 \cong \Delta_3 \cong 2^n \Rightarrow \boxed{\Delta_1 \cong 2^n}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\left.\begin{array}{l} \Delta_1 \cong m \in \mathbb{N} \\ \Delta_2 \cong n \in \mathbb{N} \\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2 \cong (m+n)$

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: Αν $\left.\begin{array}{l} A \cong B \\ \Gamma \cong \Delta \\ A \cap \Gamma = \emptyset = \Delta \cap B \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup \Gamma \cong B \cup \Delta$

Με βάση αυτό:

Αφού $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ προσπαθώ $m \cap n = \emptyset$

$m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$

$\boxed{n} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \cong \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}$

Άρα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 \cong m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\} \\ \Delta_2 \cong n \cong \{m, m+1, \dots, m+n-1\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cong \underbrace{\{0, 1, 2, \dots, m+n-1\}}_{(m+n)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cong (m+n)}$$

$$\longleftrightarrow$$

Απόδειξη Ισχυρισμού:

$A \cong B$:

$$A \xrightarrow[\text{επί}]{\varphi_1 \ 1-1} B$$

$\Gamma \cong \Delta$

$$\Gamma \xrightarrow[\text{επί}]{\varphi_2 \ 1-1} \Delta$$

ΘΕΛΩ

$\varphi : A \cup \Gamma \longrightarrow B \cup \Delta$ 1-1 και επί

Ορίζω:

$$\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in A \\ \varphi_2(x) & x \in \Gamma \end{cases}}$$

φ: 1-1 $\rightarrow B \cap \Delta = \emptyset$

φ καλά ορισμένη $\rightarrow A \cap \Gamma = \emptyset$

φ επί: •

$\longleftrightarrow$

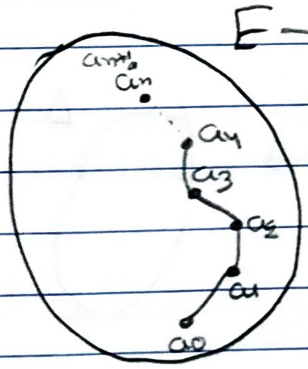
Με βάση όλα αυτά έχουμε:

$$\boxed{\Delta_1 \cup \Delta_2 \simeq 2^n + 2^n = 2^{n+1}}$$

Ορισμός: Έστω $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο. Το $\alpha \in E$ θα λέγεται μεγιστικό στοιχείο του E αν $\boxed{\nexists\ x \in E \text{ τ.ω } x > \alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall x \in E \text{ αν } x \geq \alpha \Rightarrow x = \alpha}$

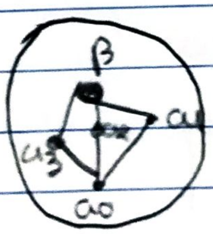
(!) (Σ)

π.χ



$E \rightarrow$ Το σύνολο αυτό δεν έχει μεγιστικό στοιχείο γιατί πάντα το $\boxed{a_{n+1} > a_n \ \forall n \in E}$

π.χ



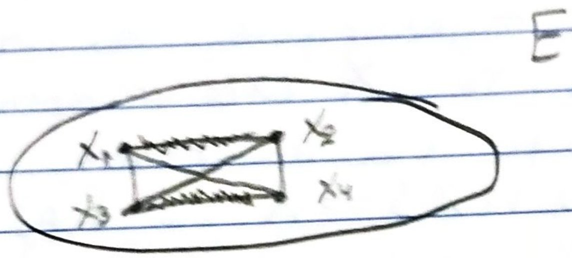
Το β είναι maximum $\Rightarrow$ μεγιστικό

Συμπέρασμα: Αν για το E $\exists \max E = \beta$

$\Rightarrow \beta$ μεγιστικό στοιχείο του E.

$\boxed{\nLeftarrow}$

π.χ.



Τα x_1, x_2 είναι μεγαλύτερα απ' τα x_3, x_4 αλλά μεταξύ τους δεν συγκρίνονται οπότε δεν υπάρχει το $\max(E)$ αφού το $\max(E)$ είναι μεγαλύτερο απ' όλα τα στοιχεία.

Όμως x_1, x_2 είναι μεγιστικά γιατί $\nexists\, x \in E$ τ.ω. $x > x_1$ και $x > x_2$

Ορισμός: $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα σύνολο $A \subseteq E$ θα λέγεται αλυσίδα αν είναι ολικά διατεταγμένο $\Leftrightarrow \forall \alpha, \alpha' \in A : \alpha < \alpha'$ ή $\alpha > \alpha'$ ή $\alpha = \alpha'$

ΛΗΜΜΑ Zorn: Έστω $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο ώστε κάθε αλυσίδα A του E να έχει άνω φράγμα. Τότε το E έχει τουλάχιστον 1 μεγιστικό στοιχείο.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq (E, \leq)$. Το A έχει άνω φράγμα αν $\exists\, \beta \in E$ ώστε $\boxed{\forall \alpha \in A \ \alpha \leq \beta}$

Ισχύει: $\boxed{\text{ΛΗΜΜΑ Zorn} \iff \text{Αξίωμα της Επιλογής}}$

Θεώρημα: Αν το ΛΗΜΜΑ Zorn ισχύει τότε ισχύει το αξίωμα της Επιλογής

Απόδειξη: Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι $\forall X$ σύνολο το X έχει συνάρτηση Επιλογής.
Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση:

$$F: P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X \text{ τω } F(A) \in A \quad \forall A \neq \emptyset$$

Ορίζουμε:

$$\mathcal{L} = \left\{ f: D(f) \to X,\ D(f) \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\} \text{ τ.ω } \forall A \in D(f) : f(A) \in A \right\}$$

Ψάχνουμε: $f \in \mathcal{L},\ D(f) = P(X) \setminus \{\emptyset\}$

Διατάσσουμε το A με συγκεκριμένο τρόπο:

$(\mathcal{L}, \leq),\ f_1 \in \mathcal{L},\ f_2 \in \mathcal{L}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} f_1: D(f_1) \to X \\ f_2: D(f_2) \to X \end{array}}$

Ορίζουμε: $\boxed{f_1 \leq f_2 \iff D(f_1) \subseteq D(f_2) \text{ και } f_1(A) = f_2(A)\ \forall A \in D(f_1)}$

Ισοδύναμα: $\boxed{\text{“ } f_2 \text{ επέκταση της } f_1 \text{ ”}}$

$(A, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο (Απόδειξη:)

ι) $f \leq f \quad \forall f \in A$ (ανακλαστική) ✓

ιι) ~~Αντισυμμετρική~~: Αν $f, g \in A$ τ.ω $\left.\begin{array}{l} \boxed{f \leq g} \ (1) \\ \boxed{g \leq f} \ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow f = g$

(1): $D(f) \subseteq D(g)$ και $\boxed{g_{|D(f)} = f}$ (3)

(2) $D(g) \subseteq D(f)$ και $f_{|D(g)} = g$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow D(f) = D(g) \\ (3) \Rightarrow g = g_{|D(g)} = g_{|D(f)} = f \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f = g}$$

ιιι) Μεταβατικότητα $\left.\begin{array}{l} f \leq g \\ g \leq h \end{array}\right\} \Rightarrow f \leq h$

Άσκηση

Θ Σο Κάθε αλυσίδα του $\mathcal{A}$ έστω S έχει άνω φράγμα.

S αλυσίδα του A.

$S = \{ f_i \ i \in I \} \subseteq A$

και $\forall i, j \in I$ $f_i \leq f_j$ ή $f_j \leq f_i$

Ισχύει:

$f < g \iff D(f) \subsetneq D(g), \ g|_{D(f)} = f$

$\Updownarrow$

$f < g \iff f \leq g$ και $f \neq g$

Θα βρούμε $f \in \mathcal{A}$ $\left(\begin{array}{l} \text{δηλ } f: D(f) \to X, \ f(A) \in A \\ \forall A \in D(f) \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\} \end{array} \right)$

ώστε $\forall f_i \in S$ να ισχύει $\boxed{f_i \leq f}$

Ορίζω: $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$

Αν $A \in D(f) \Rightarrow \exists i \in I$ τω $A \in D(f_i)$

$f(A) = f_i(A)$, $f : D(f) \longrightarrow X$

Η f $\quad f_j \leq f \;\; \forall j \in I$ <u>διότι</u>:

i) $D(f_j) \subseteq D(f) = \bigcup\limits_{i \in I} D(f_i)$

ii) $\underbrace{f/_{D(f_j)}}_{\in \mathcal{A}} = f_j$ <u>διότι</u> $\forall A \in D(f_j)$ $f(A) = f_j(A)$ $\Rightarrow$

$\Longrightarrow f_j \leq f \;\; \forall j \in I$

$\Longrightarrow$ η (αλυσίδα) έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{A}$

ΛΗΜΜΑ Zorn $\Downarrow$

Το $\mathcal{A}$ έχει μεγιστικό στοιχείο έστω F.

$F \in \mathcal{A} \Rightarrow F : D(F) \longrightarrow X$ τω $F(A) \in A \;\; \forall A \subseteq X$

<u>Όμως</u>: <u>F μεγιστικό</u> στοιχείο στο A

Μήπως $D(F) = P(X) \setminus \{\emptyset\}$?

Πράγματι αν $D(F) \subsetneq P(X) \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \Delta \subseteq X : \Delta \notin D(F)$ τότε υπάρχει

$G: D(F) \cup \{\Delta\} \longrightarrow X$

$G(A) = F(A) \quad \forall A \in D(F)$

$G(\Delta) = \delta \in \Delta$

Παρατηρούμε ότι $\underbrace{G(B) \in B \ \forall B \in D(G)}$

$\Downarrow$

$G \in \mathcal{L}$

και $G/_{D(F)} = F$

και $\underset{\Delta G}{D}(F) \subsetneq \underset{\Delta E}{D}(G)$

$\Rightarrow \boxed{F < G}$ ΕΑ

Άτοπο γιατί
F μεγιστικό
στοιχείο του A

$\Rightarrow \boxed{D(F) = P(X) / \{\emptyset\}}$